

Zur isoperimetrischen Eigenschaft  
der Kugel in Riemann'schen Räumen  
konstanter positiver Krümmung

Inauguraldissertation  
zur Erlangung der Doktorwürde  
der Mathematisch - Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Freien Universität Berlin

vorgelegt von  
Jürgen Tippe  
aus Berlin

1963

Druck:  
ERNST-REUTER-GESELLSCHAFT  
der Förderer und Freunde der Freien Universität Berlin e. V.  
DISSERTATIONS-DRUCKSTELLE  
1 Berlin 33, Garystr. 45

Zur isoperimetrischen Eigenschaft  
der Kugel in Riemann'schen Räumen  
konstanter positiver Krümmung

Inauguraldissertation

zur Erlangung der Doktorwürde

der Mathematisch - Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Jürgen T i p p e

aus Berlin



Referent: Professor Dr. A. Dinghas

Coreferent: Professor Dr. K.P. Grotemeyer

Tag der mündlichen Prüfung: 25. Juli 1962

Tag der Promotion: 24. Juli 1963

## E i n l e i t u n g <sup>\*</sup>)

Die Literatur über die Brunn-Minkowski'sche Ungleichung und die damit zusammenhängende isoperimetrische Eigenschaft der Kugel ist umfangreich. In zahlreichen Arbeiten wurde das Problem für den euklidischen  $n$ -dimensionalen Raum  $E^n$  immer wieder verallgemeinert und auf verschiedenen Wegen bewiesen. Einen zusammenfassenden Überblick und ein ausführliches Literaturverzeichnis über diese Entwicklung gibt das kürzlich erschienene *Mémoire* von A. Dinghas (s. Dinghas (1)). In den Jahren 1948 und 1949 gelang es dann E. Schmidt in einer Reihe großer Abhandlungen, die vorhandenen Erkenntnisse durch das sogenannte Spiegeltheorem und seine Zusammenhänge mit der Brunn-Minkowski'schen Ungleichung zu erweitern und darüber hinaus die Gültigkeit der ganzen Theorie auf die Riemann'schen Räume mit konstanter Krümmung auszudehnen (s. E. Schmidt (1), (2) und (3)). Auch die Frage des Gleichheitszeichens in den auftretenden Ungleichungen wurde weitgehend beantwortet. Als wesentliches Beweishilfsmittel benutzte E. Schmidt das Schwarz'sche Abrundungsverfahren, das einen Spezialfall des von A. Dinghas untersuchten allgemeinen Symmetrisierungsverfahrens darstellt (s. Dinghas (2) und auch (1)). A. Dinghas gelang es mit der Methode der Steiner-Symmetrisierung den größten Teil der Ergebnisse von E. Schmidt auf wesentlich kürzerem Wege zu beweisen (s. Dinghas (3) und (4)). Nur im sphärischen Fall, d.h. für Riemann'sche Räume  $R^n$  mit positiver konstanter Krümmung, wurde die Einschränkung gemacht, daß die be-

---

<sup>\*</sup>) Diese Schrift stellt eine kurze Zusammenfassung einer Arbeit gleichen Titels dar, die von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Freien Universität Berlin als Dissertationschrift angenommen wurde und demnächst in den *Math. Ann.* veröffentlicht wird.

trachteten Körper im Inneren einer Halbkugel liegen sollen. In der vorliegenden Arbeit soll nun die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel in Räumen mit positiver konstanter Krümmung ohne diese einschränkende Bedingung bewiesen werden. Die von A. Dinghas in seinem schon erwähnten Mémorial skizzierten neuen Beweisgedanken werden dabei benutzt.

Unter einem Riemann'schen Raum konstanter Krümmung  $K$  versteht man die Gesamtheit aller Punkte  $P(x_1, \dots, x_{n+1})$  des  $(n+1)$ -dimensionalen reellen euklidischen Raumes  $E^{n+1}$ , deren Koordinaten die Gleichung

$$(1) \quad x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + \frac{1}{K} x_{n+1}^2 = \frac{1}{K}$$

erfüllen. Der so definierte Raum wird mit  $R^n$  bezeichnet. Im folgenden wird  $K > 0$  vorausgesetzt. Die Punkte  $P_1(x_1, \dots, x_{n+1})$  und  $P_2(-x_1, \dots, -x_{n+1})$  werden als verschieden angesehen. Unter diesen Voraussetzungen nennt man  $R^n$  bekanntlich einen  $n$ -dimensionalen sphärischen Raum. Dieser Arbeit liegt der Lebesguesche Maßbegriff zugrunde, was zur Folge hat, daß alle kompakten Mengen von  $R^n$  auch meßbar sind. Mit  $|A|$  wird das unter Benutzung der "charakteristischen Funktion" von  $A$  definierte Volumen der Menge  $A \subseteq R^n$  bezeichnet. Ein wichtiges Hilfsmittel ist die Bildung der Minkowski'schen Außenmenge  $A^h$  von  $A$  im Abstand  $h$ . Diese Menge ist definiert als die Vereinigung aller  $n$ -dimensionalen sphärischen Kugeln  $S_P$  vom Radius  $h$ , deren Mittelpunkte  $P$  die Menge  $A$  durchlaufen. (Andere äquivalente Definitionen finden sich z.B. bei E. Schmidt (1).) Das andere hier benutzte fundamentale Beweishilfsmittel ist der Steiner'sche Symmetrisierungsprozeß. Der in bezug auf eine Hyperebene symmetrisierte Körper zu  $A \subseteq R^n$  wird mit  $\bar{A}$  oder auch mit  $\omega A$  bezeichnet.

Die ersten beiden Kapitel sind dem Ziel gewidmet, den fundamentalen Hilfssatz

$$(2) \quad |\bar{A}^h| \leq |A^h|$$

zu beweisen, wobei über  $A$  nur vorausgesetzt wird, daß es in  $R^n$

kompakt ist. Zum Beweis dieser wichtigen Ungleichung wird in den ersten beiden Kapiteln die zusätzliche Bedingung  $K = 1$  gemacht. Es ist klar, daß dies o.B.d.A. angenommen werden kann, weil der spezielle Raum  $R^n$  mit  $K = 1$  affin auf jeden beliebigen Raum mit positiver Krümmung, der durch (1) definiert ist, abgebildet werden kann. Dabei behalten natürlich Ungleichungen der Form (2) ihre Gültigkeit.

Im 3. Kapitel wird ein maßtheoretischer Hilfssatz hergeleitet, der neben der fundamentalen Ungleichung (2) von entscheidender Bedeutung für die Betrachtungen des 4. Kapitels ist.

Im 4. Kapitel wird der Beweis der isoperimetrischen Ungleichung im Raum  $R^n$  vollendet. Ich folge dabei im wesentlichen einem neuen Beweisschema, das A. Dinghas in seinem Mémorial kurz skizziert hat. Unter Benutzung der Ergebnisse der ersten drei Kapitel wird die Ungleichung

$$(3) \quad |S_0^h| \leq |A^h|$$

bewiesen, wobei  $A$  eine beliebige kompakte Teilmenge von  $R^n$  mit dem fest gegebenen Volumen  $V_0$  ist, während  $S_0$  eine zu dieser Mengenklasse gehörende sphärische Kugel bedeuten soll. Der Beweis der isoperimetrischen Ungleichung aus (3) ist elementar und allgemein bekannt, indem man zu den Minkowski'schen Oberflächen der betrachteten Körper übergeht.

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. A. Dinghas bin ich für wertvolle Anregungen zu Dank verpflichtet.

## 1. K a p i t e l

Wie schon in der Einleitung erwähnt, wird in diesem und dem nächsten Kapitel  $K = 1$  vorausgesetzt, d.h.  $R^n$  ist jetzt die Oberfläche der Einheitskugel in  $E^{n+1}$ .

Es wird eine Transformation diskutiert, die A. Dinghas ein-

führte, um  $R^n$  in einen euklidischen  $n$ -dimensionalen Modellraum abzubilden, wobei das nichteuklidische Volumen in  $R^n$  eine besonders einfache Deutung im Modellraum erfährt (s. Dinghas (4)). Hier werden nur die Formeln für den Fall  $K = 1$  benutzt. Man definiert neue Koordinaten  $y_1, \dots, y_n$  durch:

$$\begin{aligned} x_i &= y_i \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, (n-1) \\ (1.1) \quad x_n &= \cos \delta \sin y_n \\ x_{n+1} &= \cos \delta \cos y_n \end{aligned}$$

Dabei ist die Zahl  $\delta$  durch

$$(1.2) \quad \sin^2 \delta = \sum_{k=1}^{n-1} y_k^2 \quad 0 \leq \delta \leq \frac{\pi}{2}$$

eindeutig festgelegt.  $y_n$  ist durch (1.1) bis auf Vielfache von  $2\pi$  eindeutig festgelegt. Die Transformation artet für solche Punkte von  $R^n$  aus, deren Koordinaten der Bedingung

$$(1.3) \quad x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 = 1 \quad ; \quad x_n = x_{n+1} = 0$$

genügen. Im euklidischen Modellraum wird im Anschluß an A. Dinghas der Fundamentalbereich  $G_0$  durch

$$(1.4) \quad y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{n-1}^2 < 1 \quad ; \quad -\pi \leq y_n < \pi$$

definiert. Dann ergibt sich, daß die Transformation (1.1) den in der Punktmenge

$$(1.5) \quad M = \{P(x_1, \dots, x_{n+1}) \mid x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 = 1 \ ; \ x_n = x_{n+1} = 0\}$$

"punktierten" Raum  $R^n$  eineindeutig auf  $G_0$  abbildet. Den Ausnahmepunkten (1.3) wird jeweils eine durch

$$(1.6) \quad y_i = x_i \quad (i = 1, 2, \dots, (n-1))$$

definierte, zur  $y_n$ -Achse parallele Gerade des Randes von  $G_0$  zugeordnet. Die so erklärte Abbildung des ganzen Raumes  $R^n$  auf den Fundamentalbereich  $G_0$  bzw. dessen Berandung wird im folgenden "Transformation D" genannt.

Wir gehen zu einigen geometrischen Deutungen der Transformation D über. Mit  $\mathcal{L}$  werde das Halbebenenbüschel in  $E^{n+1}$  bezeichnet, das den  $(n-1)$ -dimensionalen Raum

$$(1.7) \quad E^{n-1} = \{P(x_1, \dots, x_{n+1}) \mid P \in E^{n+1} \ ; \ x_n = x_{n+1} = 0\}$$

als Durchschnitt enthält. In  $\mathcal{L}$  wird ein positiver Drehsinn durch die kürzeste Drehung der Halbebene

$$(1.8) \quad x_n = 0 \quad x_{n+1} \geq 0$$

in die Halbebene

$$(1.9) \quad x_{n+1} = 0 \quad x_n \geq 0$$

festgelegt. Als positive Normalenrichtung der durch (1.8) definierten Halbebene  $H_0$  wird die Richtung der positiven  $x_n$ -Achse festgelegt. Die positive Normalenrichtung einer beliebigen Halbebene  $H \in \mathcal{L}$  ist dann dadurch gegeben, daß man sich  $H_0$  zusammen mit ihrer Normalen in die Lage von  $H$  gedreht denkt. Der Winkel  $\phi$  zwischen  $H_0$  und einer beliebigen Halbebene  $H_\phi \in \mathcal{L}$  wird durch den Winkel erklärt, den ihre Normalen im Nullpunkt miteinander bilden. Offensichtlich kann  $\phi$  zwischen  $-\pi$  und  $+\pi$  beschränkt bleiben. Der Halbebene

$$(1.10) \quad x_n = 0 \quad x_{n+1} \leq 0$$

wird o.B.d.A. der Winkel  $-\pi$  zugeordnet. Leicht ist zu sehen, daß die Transformation  $D$  in eineindeutiger Weise dem  $(n-1)$ -dimensionalen Großkreis von  $R^n$ , der sich als Schnitt des in der Menge (1.5) "punktierten" Raumes  $R^n$  mit der Halbebene  $H_\phi$  aus  $\mathcal{L}$  ergibt, die  $(n-1)$ -dimensionale Hyperebene

$$(1.11) \quad y_n = \phi \quad (= \text{const.}) \quad (-\pi \leq \phi < +\pi)$$

des Fundamentalbereichs  $G_0$  zuordnet.

Es wird ferner ein Punkt  $Q(t_1, \dots, t_{n-1}, 0, 0) \in E^{n-1}$  betrachtet, dessen Koordinaten die Ungleichung

$$(1.12) \quad \sum_{i=1}^{n-1} t_i^2 < 1$$

erfüllen.  $E_Q^2$  sei die zweidimensionale Ebene durch  $Q$ , die zur  $x_n - x_{n+1}$ -Ebene parallel ist. Der (nichtleere) Durchschnitt von  $E_Q^2$  mit  $R^n$  ist ein Kreis  $K_Q^1$ , für dessen Gleichung sich ergibt:

$$(1.13) \quad x_i = t_i ; \quad x_n^2 + x_{n+1}^2 = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} t_i^2 > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1).$$

Dann läßt sich elementar zeigen, daß die Transformation  $D$  jedem

durch (1.13) definierten eindimensionalen Parallelkreis  $K_Q^1$  in eineindeutiger Weise eine zur  $y_n$ -Achse parallele Gerade  $g$  in  $G_0$  zuordnet, die durch

$$(1.14) \quad y_i = t_i \quad (i = 1, 2, \dots, (n-1))$$

gegeben ist.

Eine der wesentlichsten Eigenschaften der Transformation D wird in dem folgenden Satz formuliert. A sei eine kompakte Teilmenge von  $R^n$ . Mit  $|A|$  wird das nichteuklidische n-dimensionale L-Maß von A bezeichnet, während  $A^*$  das Bild von A in  $G_0$  bzw. dessen Berandung unter der Transformation D sein möge. Dann gilt der

Satz 1 (Dinghas):

$$(1.15) \quad |A| = \int_{A^*} dy_1 dy_2 \dots dy_n.$$

Zum Beweis s. Dinghas (4). Der Satz behält seine Gültigkeit auch für den von A. Dinghas nicht untersuchten Fall, daß A Ausnahmepunkte der Form (1.3) besitzt. Da es sich bei der isoperimetrischen Ungleichung und insbes. bei der fundamentalen Ungleichung im nächsten Kapitel um Maßaussagen handelt, liegt die Bedeutung des Satzes darin, daß anstelle eines Körpers A in  $R^n$  auch sein Bild im euklidischen Modellraum betrachtet werden kann.

Eine noch nicht erwähnte Eigenschaft der Transformation D besteht darin, daß das Bild  $A^*$  eines einfach zusammenhängenden Körpers  $A \subseteq R^n$  im Fundamentalbereich  $G_0$  auseinandergerissen sein kann. Hat nämlich A mit dem (n-1)-dimensionalen "Großkreis", der sich als Durchschnitt der Halbebene (1.10) mit  $R^n$  ergibt, innere Punkte gemeinsam, so wird dieser Effekt sicher eintreten. Dies ist für spätere Untersuchungen unangenehm, weshalb die Transformation D jetzt etwas verallgemeinert definiert wird. Die Formeln (1.1) können auch aufgefaßt werden als eine unendlich vieldeutige Abbildung von  $R^n$  auf den universellen Überlagerungsbereich Z und dessen Berandung, wobei Z durch

$$(1.16) \quad y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{n-1}^2 < 1; \quad -\infty < y_n < +\infty$$

erklärt ist.  $Z$  zerfällt in den Fundamentalbereich  $G_0$  und in dazu kongruente Nebenbereiche  $G_k$ , die sich aus  $G_0$  durch Parallelverschiebung in Richtung der  $y_n$ -Achse ergeben. Ein kompakter Körper  $A \in R^n$  hat in jedem Nebenbereich  $G_k$  ein Teilbild, das zu  $A^* \in G_0$  kongruent ist. Die so erklärte Abbildung von  $R^n$  in  $Z$  wird "Transformation  $D^*$ " genannt. Das Teilbild von  $A$ , das in  $G_0$  (bzw. dessen Rand) liegt, wird durch  $A_0^*$  bezeichnet und kurz "Hauptbild von  $A$  unter der Transformation  $D^*$ " genannt. Der Vorteil der neuen Erklärung liegt in den beiden folgenden Eigenschaften: Man sieht leicht, daß das Gesamtbild einer sphärischen Kugel  $S_p \in R^n$  unter der Transformation  $D^*$  in  $Z$  derart in Teilbilder  $(S_p)_k^*$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) aufgeteilt werden kann, daß folgende Eigenschaften gelten:

Die Mengen  $(S_p)_k^*$  bilden eine sich im Abstand  $2\pi$  parallel zur  $y_n$ -Achse periodisch wiederholende Schar von Mengen, die alle einfach zusammenhängend sind und Symmetrieebenen besitzen, die zur Hyperebene  $y_n = 0$  parallel sind. Diese Symmetrieebenen gehen durch die Punkte  $P_k^* \in G_k$ , die sich als Bilder des Mittelpunktes  $P$  unter der Transformation  $D^*$  ergeben.

Wird die Kugel  $S_p$  mit ihrem Mittelpunkt  $P$  längs eines Kreises  $K_Q^1$  der Form (1.13) verschoben, so erfahren die Teilbilder  $(S_p)_k^*$  euclidische Parallelverschiebungen in Richtung der  $y_n$ -Achse, indem sich ihre "Mittelpunkte"  $P_k^*$  entlang der in  $Z$  gelegenen Bildgeraden  $g$  von  $K_Q^1$  maximal um die Strecke  $2\pi$  verschieben.

Selbstverständlich ist es bei der Erklärung der Teilbilder  $(S_p)_k^*$  möglich, daß sie nicht mehr in einem Bereich  $G_k$  (bzw. dessen Rand) untergebracht werden können, sondern daß die Nachbarbereiche zur Definition mit herangezogen werden müssen.

Neben der Transformation (1.1) stellt die Steiner-Symmetrisierung im Raum  $R^n$  ein wichtiges Beweishilfsmittel dar. Die Definition wird hier als bekannt vorausgesetzt (s. Dinghas (3)).

Wird der zu einem kompakten Körper  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  in bezug auf eine beliebige Hyperebene durch den Nullpunkt symmetrisierte Körper mit  $\bar{A}$  bezeichnet, so gilt für die Volumina der wichtige

Satz 2:  $|\bar{A}| = |A|$ .

Weiterhin gilt, daß mit  $A$  auch  $\bar{A}$  kompakt ist. Der hier im Vergleich zu  $A$ . Dinghas betrachtete etwas allgemeinere Fall macht keine Schwierigkeiten beim Beweis.

## 2. K a p i t e l

Das Ziel dieses Kapitels besteht darin, den folgenden fundamentalen Hilfssatz zu beweisen:

Satz 3 (Dinghas):

A sei wie bisher ein kompakter Körper von  $\mathbb{R}^n$ ,  $\bar{A}$  möge der in bezug auf eine beliebige Hyperebene durch den Nullpunkt symmetrisierte Körper zu  $A$  sein. Ferner sei  $0 < h < 2\pi$  vorausgesetzt. Dann gilt für die Volumina der Minkowski'schen Außenmengen von  $A$  und  $\bar{A}$  die Ungleichung

$$(2.1) \quad |\bar{A}^h| \leq |A^h|$$

Offenbar kann o.B.d.A. angenommen werden, daß  $\bar{A}$  der bezüglich der Ebene  $x_n = 0$  symmetrisierte Körper zu  $A$  ist. Der Satz 1 erlaubt es, anstelle von (2.1) die entsprechende Ungleichung

$$(2.2) \quad |(\bar{A}^h)_0^*| \leq |(A^h)_0^*|$$

für die Hauptbilder im euklidischen Modellraum zu zeigen.

Man betrachte nun einen beliebigen, aber in Zukunft zunächst festen Kreis  $K_0^1$  der Form (1.13), der mit  $A$  einen nichtleeren Durchschnitt  $d$  haben möge. Das Hauptbild von  $d$  unter der Transformation  $D^*$  heiße  $(d)_0^*$ ; die bezüglich  $y_n = 0$  symmetrisierte Menge zu  $(d)_0^*$  heiße  $(\bar{d})_0^* \subseteq G_0$ . Die Menge  $(\bar{d})_0^*$  ist das in eindeutiger Weise bestimmte Hauptbild der bezüglich  $x_n = 0$  symmetrisierten Menge  $\bar{d}$  zu  $d$ . Jetzt wird zu  $d$  die Minkowski'sche Außenmenge  $d^h$  im Abstände  $h$  gebildet und analog  $\bar{d}^h$  konstruiert. Ihre

Hauptbilder sind  $(d^h)_0^*$  bzw.  $(\bar{d}^h)_0^*$ . Anstelle von (2.2) wird

$$(2.3) \quad |(\bar{d}^h)_0^*| \leq |(d^h)_0^*|$$

bewiesen, woraus (2.2) leicht zu folgern ist. Aber auch (2.3) wird nicht direkt bewiesen, sondern es wird das Problem zunächst noch auf ein eindimensionales zurückgeführt.

Es werden zu  $K_Q^1$  alle eindimensionalen Parallelkreise  $K_Q^1$ , betrachtet, die zu  $K_Q^1$  parallel verlaufen und von  $K_Q^1$  einen geodätischen Abstand besitzen mögen, der den Wert  $h$  nicht übertrifft. Die Mengen  $d^h$  und  $\bar{d}^h$  können offenbar nur mit diesen Kreisen (und mit den eventuell vorhandenen Ausnahmepunkten (1.3), deren geodätischer Abstand den Wert  $h$  nicht übertrifft) einen nicht-leeren Durchschnitt haben. Die Hauptbilder dieser Durchschnitte  $d'$  bzw.  $\bar{d}'$  werden  $(d')_0^*$  bzw.  $(\bar{d}')_0^*$  genannt; sie sind natürlich ebenfalls kompakt. Wird mit  $|M|$  auch das L-Maß eindimensionaler Mengen  $M$  bezeichnet, so wird anstelle von (2.3) zunächst

$$(2.4) \quad |(\bar{d}')_0^*| \leq |(d')_0^*|$$

nachgewiesen. Aus (2.4) ergibt sich unter Berücksichtigung der eventuell in  $d^h$  bzw.  $\bar{d}^h$  gelegenen Ausnahmepunkten (1.3) die Ungleichung (2.3) ohne Schwierigkeit.

Zum Beweis von (2.4) werden die geometrischen Betrachtungen des 1. Kapitels wesentlich ausgenutzt. Daneben wird ein neuerdings von A. Dinghas formulierter Gedanke aufgegriffen, indem folgender Satz von A.M. Macbeath in vereinfachter Fassung benutzt wird:

$A_1$  und  $A_2$  seien zwei kompakte Punktmengen der Geraden

$$(2.5) \quad E^1: -\infty < x < +\infty,$$

und es sei  $B = A_1 + A_2$  die Minkowski'sche Summe dieser beiden Punktmengen. Dann bedeute  $\bar{B}$  die mod.  $2\pi$  reduzierte Menge zu  $B$ :

$$(2.6) \quad \bar{B} = \{ \xi \mid \pi \leq \xi \leq \pi; \xi \equiv x; x \in B \}.$$

Unter diesen Voraussetzungen gilt:

$$(2.7) \quad L_{\pi}(\bar{B}) \geq \text{Min} \{ 2\pi; L(A_1) + L(A_2) \},$$

wobei die Zeichen  $L_*$  und  $L$  das innere bzw. das gewöhnliche  $L$ -Maß der betrachteten Mengen bedeuten sollen (s. Macbeath (1)).

Dieser Satz kann Verwendung finden, weil die in (2.4) auftretenden Punktmengen auch als Minkowski'sche Summen gewisser einfacheren Mengen gedeutet werden können, bzw. als die mod.  $2\pi$  reduzierten Mengen solcher Summen.

Mit dem Beweis von (2.4) ist der fundamentale Hilfssatz dieses Kapitels bewiesen. Wie schon in der Einleitung erwähnt, ist die Voraussetzung  $K = 1$  unwesentlich. Die Ungleichung (2.1) ist damit für jeden Riemann'schen Raum mit positiver konstanter Krümmung  $K$  nachgewiesen. Die Einschränkung  $K = 1$  war nur deshalb gemacht worden, weil dann die Transformation (1.1) die oben formulierten einfachen geometrischen Deutungen zuläßt.

### 3. K a p i t e l

In diesem Kapitel wird ein wichtiger maßtheoretischer Hilfssatz hergeleitet. Mit  $2^{\mathbb{R}^n}$  wird der Raum aller nichtleeren Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$  bezeichnet. Bedeutet  $|x, y|$  den geodätischen Abstand zweier Punkte  $x$  und  $y$  aus  $\mathbb{R}^n$ , so wird für nichtleere Teilmengen  $A$  und  $B$  von  $\mathbb{R}^n$  durch

$$(3.1) \quad |A, B| = \text{Max} \left\{ \sup_{x \in A} (\inf_{y \in B} |x, y|) ; \sup_{x \in B} (\inf_{y \in A} |x, y|) \right\}$$

im Raum  $2^{\mathbb{R}^n}$  eine Pseudometrik eingeführt. Bis auf die Aussage

" $|A, B| = 0 \rightarrow A = B$ ", die natürlich nicht erfüllt zu sein braucht, gelten die Axiome der Metrik. Es wird der folgende, in dieser Fassung erstmalig von A. Dinghas bewiesene Auswahlssatz formuliert, der dem Satz von Bolzano-Weierstraß aus der gewöhnlichen Analysis entspricht:

Satz 4 (Bolzano-Weierstraß):

S sei ein metrischer Raum, der als kompakt vorausgesetzt wird. Mit  $2^S$  wird der Raum aller nichtleeren Teilmengen von S bezeichnet. Weiterhin sei  $\{A_n\}$  eine Folge von Elementen aus  $2^S$ . Dann

existieren ein  $A \in 2^S$  und eine Teilfolge  $\{A_{n_k}\}$  von  $\{A_n\}$  derart, daß gilt:

$$(3.2) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |A_{n_k}, A| = 0.$$

Dieser Satz steht in enger Beziehung zu einem allgemeinen topologischen Satz, der sich schon bei F. Hausdorff findet (s. z.B. Hausdorff "Mengenlehre" S.150 oder Kuratowski "Topologie II"). Aus dem Dinghas'schen Beweis ergibt sich, daß die Grenzmenge A abgeschlossen angenommen werden kann. Da der Raum  $R^n$  kompakt ist, erhält man folgenden speziellen Satz:

Satz 4':

Wird mit  $\mathcal{M}(\mathcal{X})$  die Menge aller nichtleeren, L-meßbaren (abgeschlossenen) Teilmengen von  $R^n$  bezeichnet, so besitzt jede Folge  $\{M_n\} = \{X_n\}$  von Mengen aus  $\mathcal{M}(\mathcal{X})$  eine Teilfolge, die im Sinne von (3.1) gegen eine Menge  $M \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$  konvergiert.

Es erhebt sich die Frage, welche Aussagen über das (nicht-euklidische) L-Maß einer Menge  $X \in \mathcal{X}$  gemacht werden können, wenn X das Grenzelement einer im Sinne von (3.1) konvergenten Folge  $\{X_n\}$  von Elementen aus  $\mathcal{X}$  ist. Im allgemeinen kann nur folgender einfacher Satz ausgesprochen werden:

Satz 5:

Konvergiert eine Folge  $\{X_n\}$  von Elementen aus  $\mathcal{X}$  im Sinne der Metrik (3.1) gegen ein Element  $X \in \mathcal{X}$ , so gilt sicher:

$$(3.3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |X_n| \leq |X|.$$

(s. z.B. Hadwiger (1), S.158)

Für etwas speziellere Mengen kann dieses Ergebnis allerdings erheblich verbessert werden. Es werden jetzt nur solche Mengen aus  $\mathcal{X}$  betrachtet, die bezüglich aller  $(n+1)$  orthogonalen Hyperbenen  $x_i = 0$  symmetrisiert sind ( $i = 1, 2, \dots, (n+1)$ ). Solche Mengen werden kurz " $(n+1)$ -mal symmetrisierte Mengen aus  $\mathcal{X}$ " genannt. Dann hat der oben angekündigte Hilfssatz folgende Ge-

stalt:

Satz 6:

$\{X_n\}$  sei eine gegen  $X \in \mathcal{X}$  im Sinne von (3.1) konvergente Folge von  $(n+1)$ -mal symmetrisierten Mengen aus  $\mathcal{X}$ . Dann existiert  $V = \lim_{n \rightarrow \infty} |X_n|$  und es gilt:

$$(3.4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |X_n| = |X|.$$

Zum Beweis von (3.4) wird die Menge  $\tilde{X}$  aller Punkte von  $R^n$  betrachtet, die in fast allen Mengen  $X_n$  der Folge liegen.  $\tilde{X}$  ist der sog. untere Mengenlimes der Folge  $\{X_n\}$ , in Zeichen:

$$(3.5) \quad \tilde{X} = \varliminf_{n \rightarrow \infty} X_n.$$

Zunächst wird gezeigt, daß sich die Mengen  $X$  und  $\tilde{X}$  nur um eine Menge vom  $n$ -dimensionalen Maß Null unterscheiden können. Dazu werden die folgenden Hilfssätze benötigt:

Hilfssatz 1: Es sei  $x \in R^n$ ; aus  $x \notin X$  folgt auch  $x \notin \tilde{X}$ .

Hilfssatz 2: Es sei  $x \in R^n$  ein innerer Punkt von  $X$ . Dann gilt:

$$(3.6) \quad x \notin (X \setminus \tilde{X}).$$

Aus diesen beiden Sätzen folgt offensichtlich:

$$(3.7) \quad |\tilde{X}| = |X|.$$

Es wird schließlich der folgende allgemeine Satz benötigt:

Hilfssatz 3:

$\phi$  sei ein total additives Mengenfunktional auf einem  $\sigma$ -Feld  $\mathcal{M}$  mit der Eigenschaft, daß für je zwei Mengen  $A$  und  $B$  aus  $\mathcal{M}$  mit  $B \subseteq A$  folgt:  $\phi(B) \leq \phi(A)$ . Dann gilt für jede Folge  $\{A_n\}$  von Mengen aus  $\mathcal{M}$ :

$$(3.8) \quad \phi(\varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(A_n).$$

(s. Hahn-Rosenthal (1), S.22)

Aus diesen Sätzen folgt, die Ungleichung (3.3) mit berücksichtigend, die Beziehung (3.4) ohne Mühe. Es ist klar, daß ein zu Satz 6 analoger Satz im euklidischen  $E^n$  gültig ist. Der Beweis würde sich dabei vereinfachen, da die Steiner-Symmetrisierung hier einfacher formuliert werden kann.

#### 4. K a p i t e l

In diesem Kapitel wird der Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel in Riemann'schen Räumen konstanter positiver Krümmung vollendet. Ich benutze z.T. Gedanken, die A. Dinghas neuerdings in seinem Mémorial skizziert hat (s. Dinghas (1), S.86). Mit  $\mathcal{X}_0$  wird der Raum aller nichtleeren, abgeschlossenen Teilmengen von  $R^n$  bezeichnet, die ein konstantes Volumen  $V_0 > 0$  besitzen. Das Ziel dieses Kapitels besteht darin, zu zeigen, daß die Ungleichung

$$(4.1) \quad |S_0^h| \leq |A^h| \quad (A \in \mathcal{X}_0)$$

für jedes feste  $h > 0$  gültig ist, wobei  $S_0$  eine zu  $\mathcal{X}_0$  gehörende geodätische Kugel bedeuten soll. Aus (4.1) ergibt sich die isoperimetrische Eigenschaft in bekannter Weise.

Unter Benutzung des Auswahlssatzes 4' und des Ergebnisses des 2. Kapitels läßt sich leicht folgender Satz beweisen:

Satz 7:

Die Zahl  $h$  mit  $0 < h < 2\pi$  sei fest gewählt. Eine Zahl  $q$  ist durch

$$(4.2) \quad q = \inf \{ |A^h| \mid A \in \mathcal{X}_0 \}$$

definiert. Dann läßt sich eine Folge  $\{A_n\}$  von  $(n+1)$ -mal symmetrisierten Mengen aus  $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}$  angeben, die im Sinne von (3.1) gegen eine Menge  $A_0 \in \mathcal{X}_0$  konvergiert, wobei die  $A_n$  noch der zusätzlichen Bedingung

$$(4.3) \quad q \leq |A_n^h| \leq q + \frac{1}{n}$$

unterworfen sein sollen.

Es sei bemerkt, daß die Menge  $A_0$  sicher im Raum  $\mathcal{X}$  liegt, daß es dagegen keineswegs selbstverständlich ist, daß  $A_0 \in \mathcal{X}_0$  gilt. Diese letzte Beziehung ergibt sich erst unter Benutzung des Satzes 6.

Für die so gefundene Menge  $A_0$  wird weiter behauptet:

Satz 8:

Ist  $A_0$  nach Satz 7 bestimmt, so gilt:

$$(4.4) \quad |A_0^h| = q = \inf \{ |A^h| \mid A \in \mathcal{X}_0 \}.$$

Für diesen Satz werden zwei Hilfssätze aufgestellt, aus denen die obige Behauptung mit wenig Mühe folgt.

Hilfssatz 1:

Ist  $X \in \mathfrak{X}$  im Sinne des 3. Kapitels  $(n+1)$ -mal symmetrisiert, so erfüllt für jedes  $h > 0$  die Menge  $X^h$  dieselbe Symmetrieeigenschaft.

Hilfssatz 2:

Konvergiert die Folge  $\{X_n\}$  von Elementen aus  $\mathfrak{X}$  im Sinne von (3.1) gegen  $X \in \mathfrak{X}$ , so konvergiert auch  $\{X_n^h\}$  gegen  $X^h$  für alle  $h > 0$ .

Mit Satz 8 ist für jedes  $h > 0$  die Existenz einer Menge  $A_0$  aus  $\mathfrak{X}_0$  nachgewiesen, für die die Ungleichung

$$(4.5) \quad |A_0^h| \leq |A^h| \quad (A \in \mathfrak{X}_0)$$

gültig ist. Auf Grund des Ergebnisses des 2. Kapitels darf zusätzlich angenommen werden, daß  $A_0$  eine  $(n+1)$ -mal symmetrisierte Menge ist. Um (4.1) zu beweisen, muß noch gezeigt werden, daß in (4.5)  $A_0$  durch  $S_0$  ersetzt werden kann. Dazu wird noch benötigt:

Satz 9 (Hadwiger-Dinghas):

$X_1, X_2$  seien zwei Elemente aus  $\mathfrak{X}$ . Mit  $\omega X_1, \omega X_2$  werden die aus  $X_1, X_2$  durch Symmetrisierung in bezug auf eine beliebige Hyperebene durch den Nullpunkt entstandenen Mengen bezeichnet. Dann gilt:

$$(4.6) \quad |\omega X_1 \cap \omega X_2| = |X_1 \cap X_2| + |\omega X_1' \cap \omega X_2'|$$

wobei  $\omega X_1'$  und  $\omega X_2'$  die symmetrisierten Mengen zu

$$(4.7) \quad X_1' = X_1 \setminus (X_1 \cap X_2) \quad ; \quad X_2' = X_2 \setminus (X_1 \cap X_2)$$

bedeuten sollen.

Dieser Satz wurde für euklidische Räume von H. Hadwiger bewiesen (s. Hadwiger (3) und (4)). Für allgemeinere Symmetrisierungsprozesse und für Riemann'sche Räume beliebiger konstanter Krümmung findet sich der Beweis bei A. Dinghas (s. Dinghas (2) und insbes. (4), S.154/155).

Wird der Satz 9 speziell auf eine in  $\mathfrak{X}_0$  gelegene sphärische

Kugel  $S_0$  und auf die Menge  $A_0$  angewendet, wobei  $S_0$  noch der zusätzlichen Bedingung

$$(4.8) \quad |A_0 \cap S_0| = \max.$$

genügen soll, so beweist man schließlich den

Satz 10:

Die  $(n+1)$ -mal symmetrisierte Menge  $A_0 \in \mathcal{X}_0$  erfülle die Bedingung (4.4) des Satzes 8. Ferner sei  $S_0$  eine sphärische Kugel aus  $\mathcal{X}_0$ , die (4.8) erfüllt und es gelte  $A_0 \neq S_0$ . Dann kann eine Symmetrisierung  $\omega$  mit der Eigenschaft

$$(4.9) \quad |\omega A_0 \cap S_0| > |A_0 \cap S_0|$$

angegeben werden.

Damit sind alle Vorbereitungen getroffen, um den Dinghaschen Gedankengang durchzuführen, mit dem gezeigt wird, daß in (4.5) die Menge  $A_0$  durch  $S_0$  ersetzt werden kann (s. Dinghas (1), S.91). Die Ungleichung (4.1) und damit die isoperimetrische Ungleichung sind somit bewiesen.

Es ist nun gelungen, für Riemann'sche Räume mit positiver konstanter Krümmung den Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel mit der von A. Dinghas hierfür erstmalig benutzten Methode der Steiner-Symmetrisierung vollständig durchzuführen. Es erscheint nicht ausgeschlossen, daß die Theorie zum großen Teil auf die affine Differentialgeometrie übertragbar ist. Dagegen leidet die Untersuchung abstrakter, nicht notwendig endlich-dimensionaler Räume an der bekannten Schwierigkeit, einen geeigneten Maßbegriff zu definieren.

## L i t e r a t u r v e r z e i c h n i s

### A. Dinghas:

- (1) Minkowski'sche Summen und Integrale. Superadditive Mengenfunktionale. Isoperimetrische Ungleichungen. Verlag Gauthier-Villars, Paris, 1961.
- (2) Über das Verhalten der Entfernung zweier Punktmengen bei gleichzeitiger Symmetrisierung derselben. (Arch. Math., Bd.8, 1957, S.46/51)
- (3) Einfacher Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im euklidischen Raum von  $n$  Dimensionen. (Math. Nachr., Bd.2, 1949, S.107/113)
- (4) Einfacher Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel in Riemann'schen Räumen konst. Krümmung. (Math. Nachr., Bd2, 1949, S.148/162)

### H. Hadwiger:

- (1) Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1957.
- (2) Ein Auswahlssatz für abgeschlossene Punktmengen. (Portug. Math., Bd.8, 1949, S.13/15)
- (3) Minkowski'sche Addition und Subtraktion beliebiger Punktmengen und die Theoreme von Erhard Schmidt. (Math. Z., Bd.53, 1950/51, S.210/218)
- (4) Die isoperimetrische Ungleichung im Raum. (Elemente Math. Basel, Bd.3, 1948, S.25/48)

### H. Hahn und A. Rosenthal:

- (1) Set Functions.  
(The University of New Mexico Press, New Mexico, 1948)

### P. Halmos:

- (1) Measure Theory.  
Verlag: Van Nostrand Co., New York, 1950

### A.M. Macbeath:

- (1) On measure of Sum-Sets II. The Sum-Theorem for the Torus. (Proc. Camb. Phil. Soc., Bd49, 1953, S.40/43)

### E. Schmidt:

- (1) Die Brunn-Minkowski'sche Ungleichung und ihr Spiegelbild sowie die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel in der euklidischen und nichteuklidischen Geometrie I. (Math. Nachr., Bd.1, 1948, S.81/157)
- (2) dto. Teil II. (Math. Nachr., Bd.2, 1949, S.171/244)
- (3) Der Brunn-Minkowski'sche Satz und sein Spiegeltheorem sowie die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel in der euklidischen und hyperbolischen Geometrie. (Math. Ann., Bd.120, 1948, S.307/422)

## L e b e n s l a u f

Mein Name ist Jürgen T i p p e. Geboren wurde ich am 14.7.35 in Potsdam als Sohn des Studienrates Ernst Tippe und seiner Ehefrau Ursula, geb. Dedekind. Von 1941 bis zum Frühjahr 1945 besuchte ich in Potsdam die Grundschule. Auf Grund der Schulreform in der Sowjetzone konnte ich erst im Herbst 1949 die Oberschule in Blankenburg/Harz besuchen und bestand dort im Frühjahr 1953 mein Abitur. Nach einjährigem Studium an der Humboldt-Universität in Ostberlin (unter den Professoren Grell und Reichardt) verließen meine Eltern mit meinen beiden Brüdern und mir die Sowjetzone und baten um Notaufnahme in Westberlin. Nach der Erwerbung der Anerkennung meines Abiturzeugnisses für Westberlin und die Bundesrepublik bin ich seit dem Wintersemester 1955/56 an der Freien Universität Berlin immatrikuliert und studiere Mathematik. Meine mathematische Ausbildung verdanke ich im wesentlichen den Professoren A. Dinghas und K.P. Grottemeyer, sowie Herrn Prof. Dr. H. Pachale, der mein Interesse insbesondere auf den Gebieten Funktionalanalysis und Maßtheorie förderte. Am 28.5.1958 bestand ich die Vordiplomprüfung und ließ mir kurz danach von Herrn Professor Dr. A. Dinghas ein Diplomthema über Fixpunktsätze in allgemeinen topologischen Räumen geben. Am 14. März 1960 bestand ich die Diplomprüfung und wurde danach von den Direktoren des Mathematischen Institutes der Freien Universität Berlin mit der Wahrnehmung einer Assistentenstelle am Lehrstuhl für Angewandte Mathematik beauftragt. Dadurch habe ich Gelegenheit bekommen, meine mathematischen Kenntnisse zu erweitern und mich auf Anregung von Herrn Professor Dinghas insbes. mit dem Fragenkomplex der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel in nichteuklidischen Geometrien zu beschäftigen. Dieses Thema wurde auch in der vorliegenden Arbeit behandelt.





